17-9-2025

Universidad de El Salvador. Facultad de Ingeniería y Arquitectura. Unidad de Ciencias Básicas.

Unidad III: Aplicaciones de la integral definida.

Ciudad Universitaria, septiembre de 2025

CÁLCULO INTEGRAL Y MATEMÁTICA II



UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL Y MATEMÁTICA II
CICLO II – 2025

Unidad III: Aplicaciones de la integral definida.

3.1 Área entre curvas.

Como se ha abordado en las secciones previas, la integral definida permite calcular el área comprendida entre el gráfico de la función y el eje x. Este enfoque puede extenderse, con una leve profundización conceptual, al cálculo del área delimitada entre dos funciones. En la figura 1 se muestra la gráfica de dos funciones f y g, con $f(x) \geq g(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Esta condición garantiza que el área entre ambas curvas puede determinarse mediante una integral definida, considerando la diferencia entre sus valores en cada punto del intervalo de la siguiente manera:

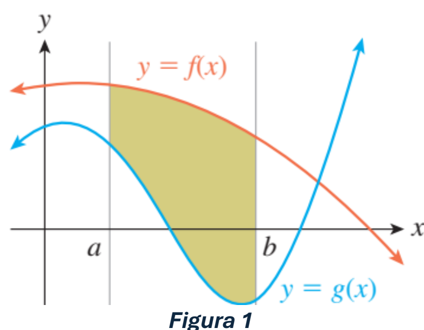
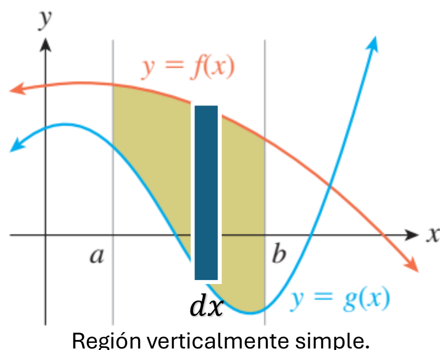


Figura 1

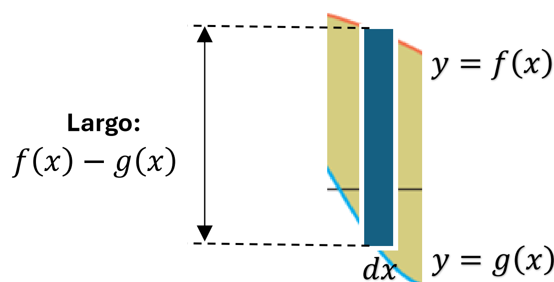
1. Dibujamos un elemento representativo de área en la región que queremos calcular, como se muestra en la figura 2.



Región verticalmente simple.

Este elemento tiene las siguientes características:

- Ancho: dx
- Largo: $f(x) - g(x)$
- Área: $dA = \big(f(x) - g(x)\big)dx$



Al sumar la contribución de todos los elementos diferenciales se obtiene el área de la región:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \qquad (1)$$

✓ **Ejemplo 1: Área entre dos curvas.**

Encuentre el área de la región entre $f(x) = -x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^2 - 3x - 4$, $x = -1$ y $x = 1$.

Solución: el área cuya área se desea calcular se muestra en la figura 3, junto con un elemento diferencial de área. Dado que la gráfica de f se mantiene arriba de la de g en el intervalo $[-1,1]$, se cumple que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[-1,1]$. En consecuencia es válido utilizar la expresión (1) para calcular el área siguiendo el procedimiento que se detalla a continuación:

Área del elemento diferencial:

$$dA = \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Área entre las curvas:

$$A=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx$$

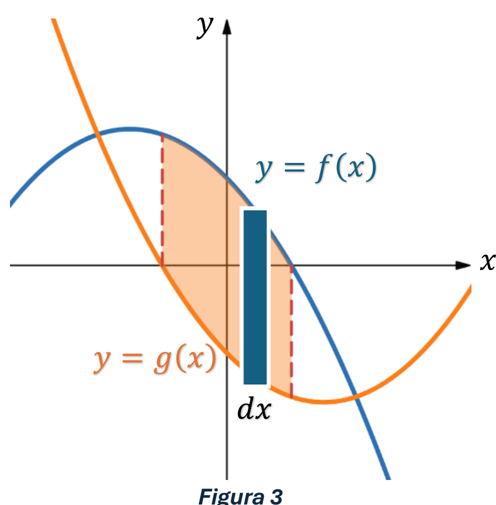


Figura 3

$$A=\int_{-1}^{1}[(-x^2-3x+4)-(x^2-3x-4)]dx$$

$$A=\int_{-1}^{1}[-2x^2+8]dx$$

$$A=\left[8x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\left[8-\frac{2}{3}\right]-\left[-8-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$A=\left[\frac{22}{3}\right]-\left[-\frac{22}{3}\right]$$

$$A=\frac{44}{3}\text{ unidades}^2$$

Nota: antes de continuar con los ejemplos siguientes, vea el análisis gráfico de cómo funciona la ecuación (1) en la siguiente página.

En el ejemplo 1 $f(x)\geq g(x)$ de modo que el gráfico de f nunca desciende por debajo del gráfico de g y, por lo tanto, los gráficos no pueden cruzarse (aunque pueden tocarse). El ejemplo 2 muestra lo que sucede cuando los dos gráficos se cruzan.

✓ **Ejemplo 2: Regiones encerradas por curvas que se cruzan.**

Calcular el área de la región entre $f(x)=1-x^2$ y $g(x)=3x^2$ entre $x=0$ y $x=1$. La región se muestra en la figura 4.

Solución: a partir de la figura 4 podemos observar que ninguna de las gráficas se mantiene sobre la otra en el intervalo completo. Para solventar esto, dividimos el área en dos partes a cada lado del punto en el que se cruzan los gráficos y luego calculamos cada área por separado utilizando la ecuación (1). Para proceder, es necesario identificar con exactitud el punto de intercepción entre ambas funciones. Este se encuentra resolviendo la ecuación $3x^2=1-x^2$.

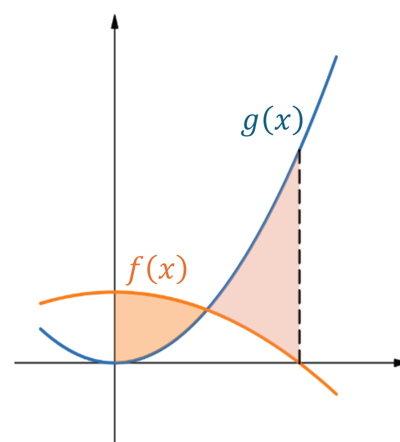


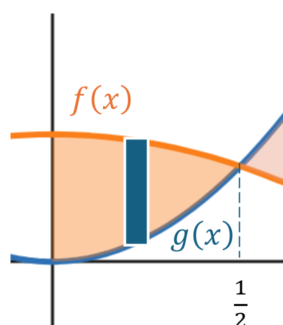
Figura 4

Resolviendo para x:

$3x^2=1-x^2$

$4x^2=1\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

Como estamos interesados en el intervalo $[0,1]$ tomamos $x=1/2$.



Para $\mathbf{0\leq x\leq 1/2}$: en este tramo $f(x)\geq g(x)$. Entonces,

$$dA_1=\big(f(x)-g(x)\big)dx$$

$$A_1=\int_{0}^{1/2}[1-x^2-3x^2]dx$$

$$A_1=\int_{0}^{1/2}[1-4x^2]dx$$

$$A_1=\int_{0}^{1/2}dx-4\int_{0}^{1/2}x^2\,dx=x\Big|_0^{1/2}-\frac{4}{3}x^3\Big|_0^{1/2}$$

$$A_1=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right)$$

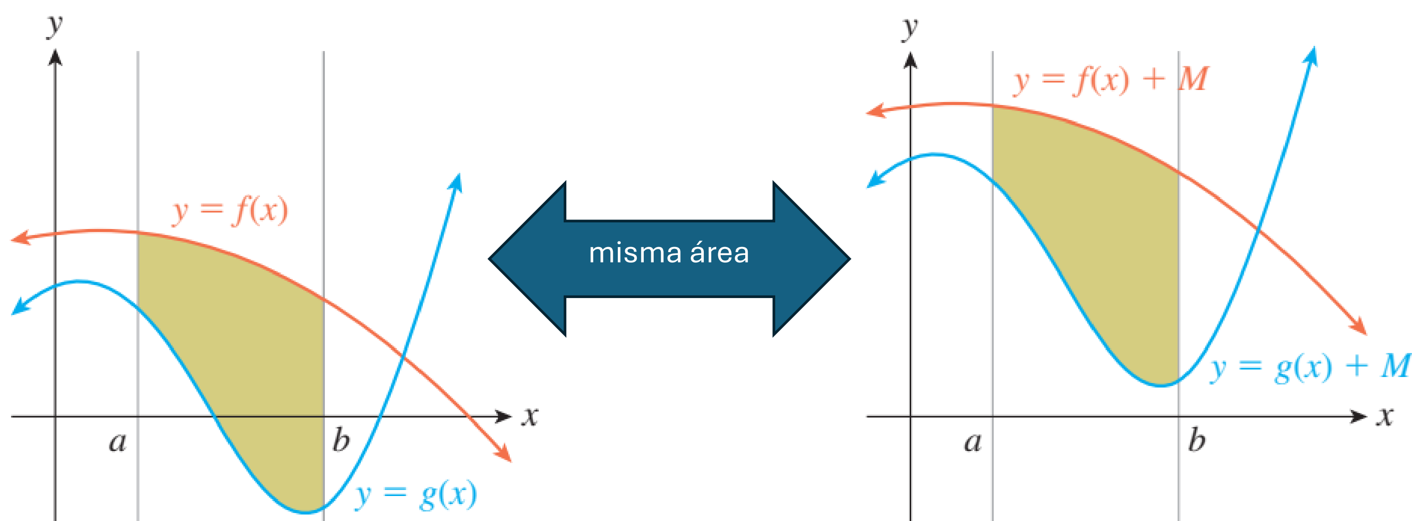
$$A_1=\frac{1}{3}\,unidades^2$$



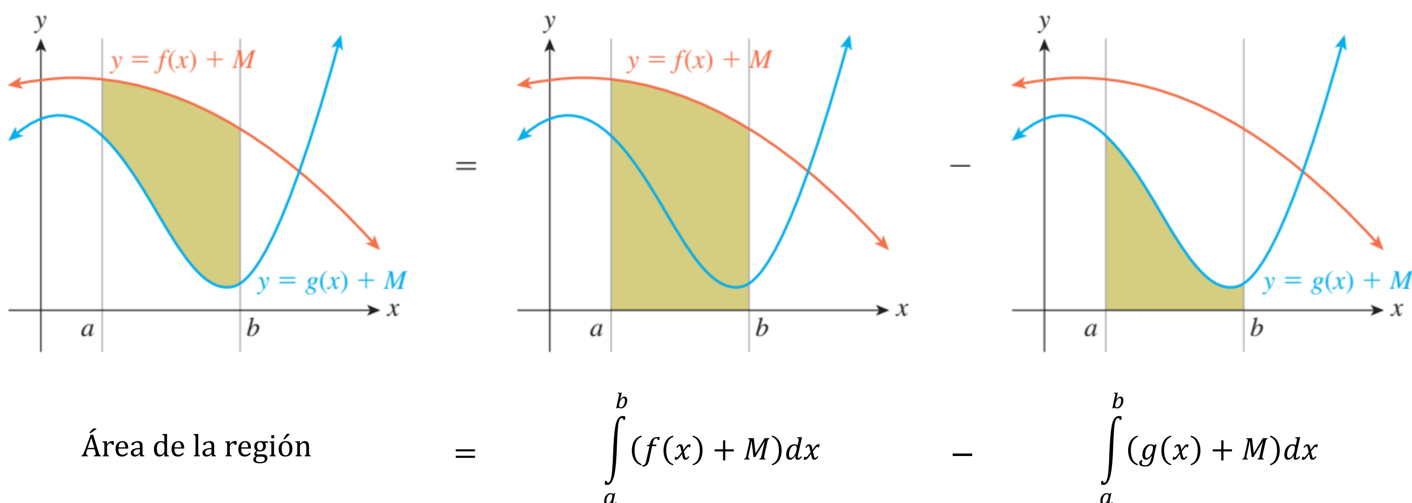
Interactúa con este ejemplo en GeoGebra

¿Cómo funciona la fórmula para el área entre curvas?

El único requisito que se ha impuesto a (1) es que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Para hacer el argumento más simple, suponga que desplazamos ambos gráficos verticalmente hacia arriba agregando una constante M lo suficientemente grande como para elevarlos a ambos por encima del eje x en el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la siguiente figura.



Como lo ilustra la figura, el área de la región entre los gráficos no se ve afectada, por lo que calcularemos el área de la región que se muestra a la derecha. Ese cálculo se muestra en la siguiente figura.



$$\text{Área de la región} = \int_a^b (f(x) + M)dx - \int_a^b (g(x) + M)dx$$

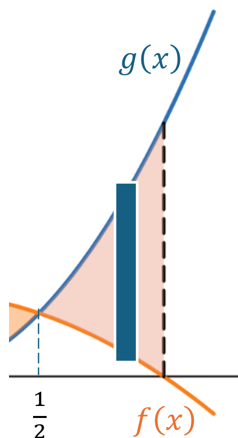
Entonces, el área de la región es

$$\int_a^b (f(x) + M)dx - \int_a^b (g(x) + M)dx = \int_a^b [(f(x) + M) - (g(x) + M)]dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Que es la ecuación (1)

Para $\mathbf{1/2 \leq x \leq 1}$: en este tramo $g(x) \geq f(x)$. Entonces $dA_2 = \big(g(x) - f(x)\big)dx$

$$A_2 = \int_{1/2}^{1} [3x^2 - (1 - x^2)]\, dx = \int_{1/2}^{1} (4x^2 - 1)dx$$



$$A_2 = 4\int_{1/2}^{1} x^2 dx - \int_{1/2}^{1} dx$$

$$A_2 = \frac{4}{3}x^3|_{1/2}^{1} - x|_{1/2}^{1}$$

$$A_2 = \frac{4}{3}\left[1 - \frac{1}{8}\right] - \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$A_2 = \frac{2}{3}\ \text{unidades}^2$$

Si A es el área total encerrada por las curvas, entonces

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1\, unidad^2$$

Resumen:

- ✓ Encuentra todos los puntos de intersección resolviendo $f(x) = g(x)$ para x. Esto determinará el intervalo sobre el cual integrarás o dividirá un intervalo dado en regiones entre los puntos de intersección.
- ✓ Determina el área de cada región que encontraste integrando la diferencia entre la función mayor y la función menor.
- ✓ Suma las áreas que encontraste en el paso anterior para obtener el área total.

En los ejemplos anteriores se proporcionan las gráficas de las funciones. Si no se dispone de ellas, un primer paso sería graficar las funciones, aunque esto podría consumir tiempo valioso en la resolución del problema. Aunque no es posible definir un procedimiento que funcione para cualquier combinación de funciones, en el siguiente ejemplo se esboza un método que podría ser útil en algunos casos.

✓ **Ejemplo 3: Área de la región entre dos gráficas.**

Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 10$, $g(x) = 4x - x^2$ en $[1,3]$.

Solución: primero debemos determinar cuál de las gráficas está sobre la otra. Comencemos encontrando la diferencia entre ellas:

$f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 10 - 4x + x^2$

Por la naturaleza de ambas funciones completamos cuadrados

$f(x) - g(x) = 2x^2 - 8x + 10 = 2(x^2 - 4x + 5)$

$f(x) - g(x) = 2(x^2 - 4x + 4 + 1)$

$f(x) - g(x) = 2(x^2 - 4x + 4) + 2 = 2(x - 2)^2 + 2$

Como la diferencia $2(x - 2)^2 + 2 > 0$ concluimos que $f(x) \geq g(x)$ para todo valor de x.

Por lo tanto, de la ecuación (1)

$$A = \int_{1}^{3} [f(x) - g(x)]dx$$

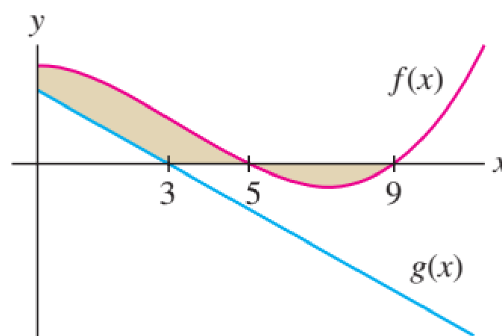
$$A = \int_{1}^{3} (2x^2 - 8x + 10)dx$$

$$A = \frac{2}{3}x^3|_1^3 - 4x^2|_1^3 + 10x|_1^3$$

$$A = \frac{2}{3}[27 - 1] - 4[9 - 1] + 10[3 - 1]$$

$$A = \frac{16}{3}\ \text{unidades}^2$$

Ejercicio: exprese el área total de la región sombreada en la siguiente figura como la suma de tres integrales que involucren a $f(x)$ y $g(x)$.



Integración a lo largo del eje y

Suponga que expresamos x como una función de y, es decir $x = g(y)$. ¿Cuál es el significado de la integral

$\int_c^d g(y)\,dy$? Esta integral se puede interpretar como un área neta, donde las regiones a la derecha del eje y tienen un área neta positiva y las regiones a la izquierda del eje y tienen un área neta negativa:

$$\int_c^d g(y)dy = \text{Área neta entre el gráfico y el eje } y \text{ para } c \le y \le d$$

En términos más generales, si $g(y) \ge h(y)$ entonces el gráfico de $x = g(y)$ se encuentra a la derecha de la gráfica de $x = h(y)$. La fórmula correspondiente a la ecuación (1) es

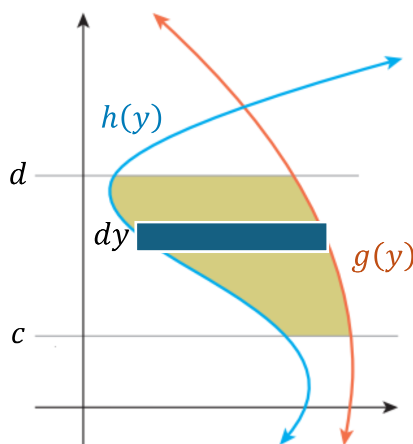


Figura 5
Región horizontalmente simple.

$$dA = [g(y) - h(y)]dy$$

$$A = \int_c^d [g(y) - h(y)]dy \quad (2)$$

✓ **Ejemplo 4: integración en el eje y.**

Calcular el área encerrada por la gráfica de $h(y) = y^2 - 1$ y $g(y) = y^2 - \frac{y^4}{8} + 1$. La región se muestra en la figura 6.

Solución: Primero, encontramos los puntos donde las gráficas se interceptan resolviendo $h(y) = g(y)$ para y.

$$y^2 - 1 = y^2 - \frac{y^4}{8} + 1 \Rightarrow \frac{y^4}{8} - 2 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$$

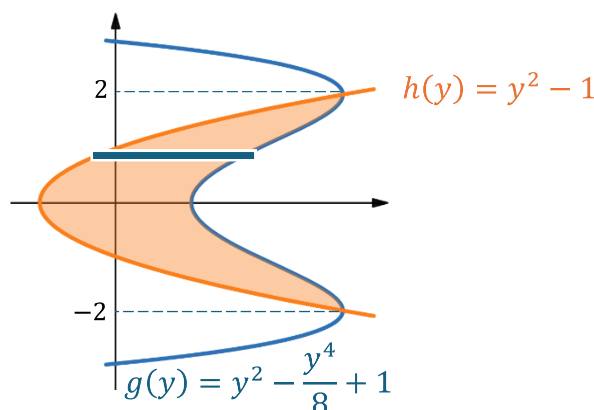


Figura 6

En el intervalo $-2 \le y \le 2$, $g(y) \ge h(y)$ por tanto

$$g(y) - h(y) = y^2 - \frac{y^4}{8} + 1 - y^2 + 1 = 2 - \frac{y^4}{8}$$

$$dA = [g(y) - h(y)]dy$$

$$dA = \left(2 - \frac{y^4}{8}\right)dy$$

Al sumar todas las contribuciones de los elementos diferenciales obtenemos el área (en unidades cuadradas):

$$A = \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{y^4}{8}\right)dy$$

$$A = 2\int_{-2}^{2} dy - \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} y^4 dy = 2y|_{-2}^{2} - \frac{1}{40}y^5|_{-2}^{2}$$

$$A = 2(2+2) - \frac{1}{40}(2^5 + 2^5) = 8 - \frac{64}{40} = \frac{32}{5}$$

✓ **Ejemplo 5: ¿Qué orden de integración es más conveniente?**

Considere la región sombreada en la figura 7. Exprese el área de la región como integrales definidas, primero usando integración con respecto a x y luego con respecto a y. ¿Cuál parece más sencilla de calcular?

Solución: **Integración con respecto a x:** en este caso, se requiere plantear dos integrales. ¿Por qué? En la figura 7a se muestra un detalle de la región.

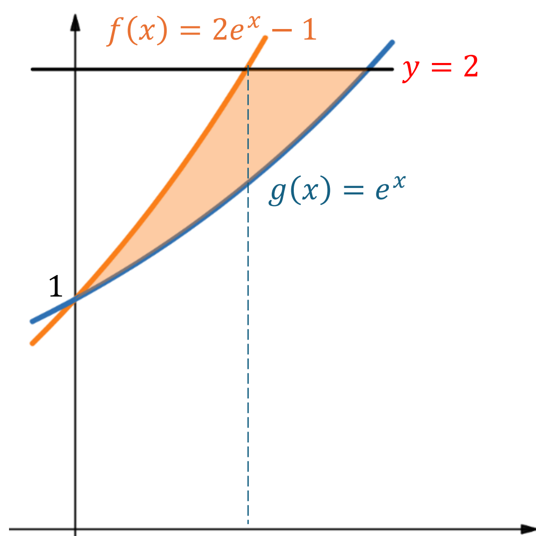
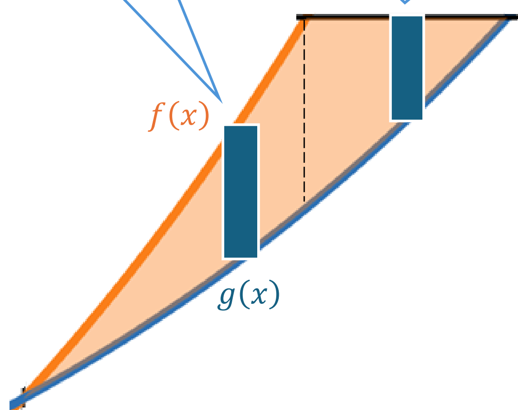


Figura 7

Si colocamos un elemento diferencial vertical y lo movemos imaginariamente de izquierda a derecha notaremos que:

A la izquierda de la línea punteada el rectángulo está limitado en la parte superior por f y en la parte inferior por g.

A la derecha de la línea punteada el rectángulo está limitado en la parte superior por $y = 2$ y en la parte inferior por g.



La línea punteada que actúa como frontera es la intersección de $y = 2$ y $f(x) = 2e^x - 1$. Si resolvemos para x:

$$2e^x - 1 = 2 \Rightarrow 2e^x = 3 \Rightarrow e^x = \frac{3}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

El área de los elementos diferenciales está dada por:

A la izquierda de $x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$:

$$dA_1 = \big(f(x) - g(x)\big)dx = (e^x - 1)dx$$

$$A_1 = \int_0^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} (e^x - 1)dx$$

A la derecha de $x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$: para determinar el límite superior de integración necesitamos encontrar el punto de intersección de $y = 2$ y $g(x) = e^x$. Si resolvemos para x:

$$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

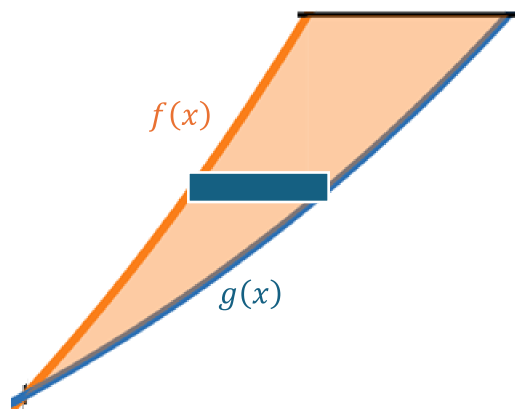
$$dA_2 = \big(2 - g(x)\big)dx = (2 - e^x)dx$$

$$A_2 = \int_{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}^{\ln(2)} (2 - e^x)dx$$

El área total está dada por $A_T = A_1 + A_2$

$$A_T = \int_0^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} (e^x - 1)dx + \int_{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}^{\ln(2)} (2 - e^x)dx$$

Integración con respecto a y: en este caso, solo se necesita plantear una sola integral como muestra la siguiente figura. En todo el intervalo de integración el elemento diferencial está limitado a la izquierda por $f(x)$ y a la derecha por $g(x)$.



El intervalo de integración, como puede verse en la figura 7, es $1 \leq y \leq 2$. El último elemento que necesitamos son las ecuaciones. Recordemos, del ejemplo 4, que debemos tener despejada la variable x.

Para $f(x)$:

$$y = 2e^x - 1 \Rightarrow 2e^x = y + 1 \Rightarrow e^x = \frac{y+1}{2}$$

$$x_{izquierda} = \ln\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

Para $g(x)$:

$$y = e^x \Rightarrow x_{derecha} = \ln y$$

El área del elemento representativo está dada por

$$dA = \left(x_{derecha} - x_{izquierda}\right)dy$$

$$dA = \left(\ln y - \ln\left(\frac{y+1}{2}\right)\right)dy$$

Al sumar las contribuciones de todos los elementos diferenciales obtenemos el área total

$$A = \int_1^2 \left(\ln y - \ln\left(\frac{y+1}{2}\right)\right)dy$$

- ¿Cuál de las dos alternativas parece más fácil de evaluar?
- Utilizando la opción que considere más fácil evalúe la integral definida. Respuesta: $\ln\left(\frac{16}{9}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.1699$



Interactúa con este ejemplo en GeoGebra.

Ejercicios finales:

Escriba la o las integrales definidas que representan el área de las regiones indicadas.

